

拟三次 Bézier 曲线的形状调整

韩西安^{1,2}, 马逸尘¹, 黄希利³

(1. 西安交通大学理学院, 710049, 西安; 2. 装备指挥技术学院基础部, 101416, 北京;
3. 装备指挥技术学院试验指挥系, 101416, 北京)

摘要: 对于 Bézier 曲线的形状调整问题, 给出了一组含有 2 个参数的四次多项式基函数, 它是三次 Bernstein 基函数的扩展. 基于该组基函数定义的带形状参数的曲线, 称为三次拟 Bézier (三次 Q-Bézier) 曲线, 其优点是在保持控制多边形不变的情况下, 可以通过改变形状参数来调整曲线形状. 研究基于几何约束的形状调整, 通过改变形状参数来满足给定的约束条件, 得到形状参数简洁的计算公式, 具有明显的几何意义. 计算实例表明, 该方法是有用的, 可以广泛地应用于计算机辅助设计中曲线形状调整.

关键词: 三次 Q-Bézier 曲线; 三次 Bézier 曲线; 形状参数; 形状调整

中图分类号: TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2007)08-0903-04

Shape Modification of Cubic Quasi-Bézier Curve

Han Xi'an^{1,2}, Ma Yichen¹, Huang Xili³

(1. School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China; 2. Department of Basic Theories, Academy of Equipment Command & Technology, Beijing 101416, China; 3. Department of Experiment Command, Academy of Equipment Command & Technology, Beijing 101416, China)

Abstract: For modifying the shape of Bézier curve, a class of quartic polynomial basis functions with two adjustable shape parameters is presented, which can be regarded as an extension to classical cubic Bernstein basis functions. A polynomial curve called cubic quasi-Bézier (cubic Q-Bézier) curve with shape parameters is defined to outperform general cubic Bézier curves with the inherent flexibility. The shape of the cubic Q-Bézier curve can be adjusted by altering the shape parameters when the control polygon remains unchanged. The shape modification of the cubic Q-Bézier curve by geometric constraints is investigated. A new method is presented by changing the shape parameters to satisfy the given constraints, and the corresponding simple computational formulae of the shape parameters with unambiguous geometric significance are proposed. Some practical examples verify the applicability.

Keywords: cubic Q-Bézier curve; cubic Bézier curve; shape parameter; shape modification

曲线、曲面表示是计算机辅助几何设计 (CAGD) 中的一个重要课题, 以 Bernstein 基函数构造的 Bézier 曲线由于结构简单、直观是 CAGD 中表示曲线、曲面的重要工具之一^[1]. Bézier 曲线具有许多良好的性质, 在 CAGD 中得到广泛的应用, 如何方便地设计和修改 Bézier 曲线是一个重要研究课

题. 然而, 当控制多边形给定后, Bézier 曲线的形状也就惟一确定, 若需调整 Bézier 曲线的形状, 则需改变 Bézier 曲线的控制顶点. 通过引入权因子, 有理 Bézier 曲线不改变控制顶点, 由权因子可调整曲线的形状, 但有理 Bézier 曲线具有一定的缺陷, 如求导后曲线次数增加、不方便求积分等^[2].

随着几何造型工业的发展,尤其是在飞机、舰船的外形设计与优化中,往往需要改变曲线或曲面的几何特性来调整它们的形状.为了更有效地对曲线、曲面的形状进行调控,不少学者开始研究推广 Bézier 曲线^[3-5].徐立等^[6]通过修改 Bézier 曲线的控制顶点来满足给定的点约束,但不能很好地保持曲线的端点性质,几何意义不明显.

本文针对三次 Bézier 曲线的扩展,给出一组带有 2 个形状参数的四次基函数组,并由此组基函数构造了一类具有 2 个形状参数 λ, μ 的三次 Q-Bézier 曲线,具有与三次 Bézier 曲线类似的性质.在控制顶点保持不变的情况下,通过改变形状参数可得到不同的逼近控制多边形的曲线.

1 带形状参数的三次 Bézier 曲线

1.1 带形状参数的基函数

定义 1 对 $t \in [0, 1]$, $\lambda, \mu \in [-3, 1]$, 称关于 t 的多项式

$$\left. \begin{aligned} b_{0,3}(t) &= (1-\lambda t)(1-t)^3 \\ b_{1,3}(t) &= (3+\lambda-\lambda t)t(1-t)^2 \\ b_{2,3}(t) &= (3+\mu t)t^2(1-t) \\ b_{3,3}(t) &= (1-\mu+\mu t)t^3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

为带形状参数 λ, μ 的基函数.

容易证明,由式(1)所定义的基函数与 Bernstein 基函数相比有许多类似的性质,如非负性、单位分解性、线性无关性等.图 1 为不同 λ, μ 时基函数的图形.

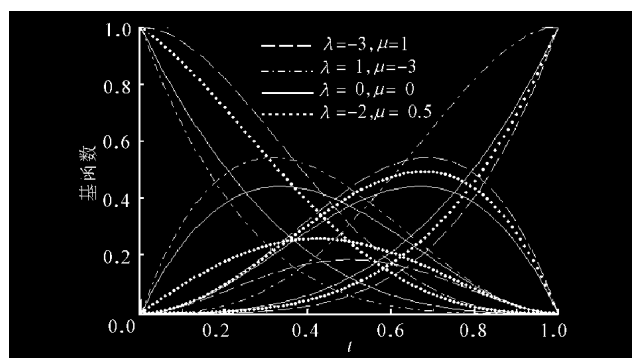


图 1 基函数的图形

1.2 三次 Q-Bézier 曲线及其性质

定义 2 给定 4 个控制顶点 $P_i \in \mathbf{R}^2 (i=0, 1, 2, 3)$, 称曲线

$$r(t) = \sum_{i=0}^3 P_i b_{i,3}(t) \quad t \in [0, 1] \quad (2)$$

为带有参数 λ, μ 的拟三次 Bézier 曲线,简称三次 Q-Bézier 曲线.显然,当 $\lambda=\mu=0$ 时,三次 Q-Bézier 曲

线退化为三次 Bézier 曲线.从式(1)的定义,不难得到三次 Q-Bézier 曲线式(2)具有对称性、凸包性、仿射不变性以及如下端点性质

$$\left. \begin{aligned} r(0) &= P_0; \quad r'(0) = (3+\lambda)(P_1-P_0) \\ r(1) &= P_3; \quad r'(1) = (3+\mu)(P_3-P_2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

图 2 分别给出了几种三次 Q-Bézier 曲线的图形.根据三次 Q-Bézier 曲线的性质,三次 Q-Bézier 曲线介于曲线 $r_1(t), r_2(t)$ 之间,令

$$r_1(t) = (1+3t)(1-t)^3 P_0 + 3t^2(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)^2 P_2 + (4-3t)t^3 P_3 \quad (4)$$

$$r_2(t) = (1-t)^4 P_0 + (4-t)t(1-t)^2 P_1 + (3+t)t^2(1-t) P_2 + t^4 P_3 \quad (5)$$

则对于任意一点 $P^* \in (r_1(t), r_2(t))$, 至少有一条三次 Q-Bézier 曲线 $r(t)$ 通过该点,我们称区域 $D = (r_1(t), r_2(t))$ 为三次 Q-Bézier 曲线 $r(t)$ 的容许插值区域,如图 3 所示.事实上

$$\begin{aligned} r(t) - r_1(t) &= (\lambda+3)t(1-t)^3(P_1-P_0) + (\mu+3)(1-t)t^3(P_2-P_3) \\ r_2(t) - r(t) &= (1-\lambda)t(1-t)^3(P_1-P_0) + (1-\mu)(1-t)t^3(P_2-P_3) \end{aligned}$$

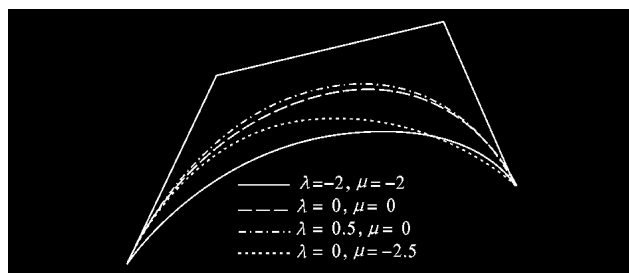
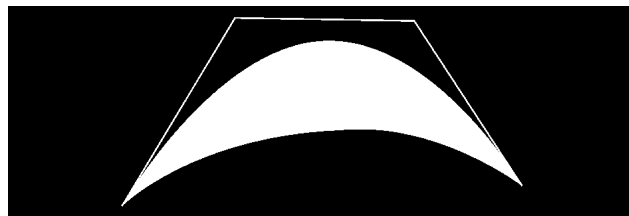
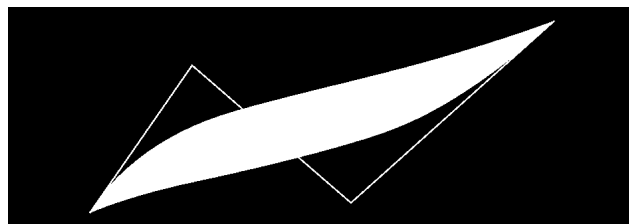


图 2 三次 Q-Bézier 曲线



(a) M-型控制多边形



(b) S-型控制多边形

图 3 三次 Q-Bézier 曲线 $r(t)$ 的容许插值区域

由于 $-3 \leq \lambda, \mu \leq 1$, 故 $r(t)$ 介于 $r_1(t)$ 与 $r_2(t)$ 之间.

2 三次 Q-Bézier 曲线的形状调整

由图 2 可以看出, 改变三次 Q-Bézier 曲线的 2 个形状参数, 可以方便地调整三次 Q-Bézier 曲线的形状. 对于参数化曲线, 设计者通常最关心的是曲线上某一参数点处的几何性质, 如位置、切矢和曲率等等. 本文考虑的是基于点和切矢的约束.

下面, 给出几何造型中常用的两类调整形状的方法: ①改变曲线上某参数对应点的位置, 即保持控制多边形不变, 使三次 Q-Bézier 曲线插值某一给定的点; ②调整某参数处的切矢. 为了更方便地研究三次 Q-Bézier 曲线 $r(t)$ 满足几何约束的形状调整, 将式(2)改写为如下形式

$$r(t) = B(t) + \lambda t(1-t)^3(P_1 - P_0) - \mu(1-t)t^3(P_3 - P_2) \quad (6)$$

式中: $B(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i^3(t)$ 为三次 Bézier 曲线, 这里

$$B_i^3(t) = \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i, i = 0, 1, 2, 3 \text{ 为三次}$$

Bernstein 基函数.

2.1 基于点约束的形状调整

问题 1 给定控制多边形 $P_0P_1P_2P_3$ (设 $P_0P_1 \neq P_2P_3$, 即 P_0P_1 与 P_2P_3 不平行) 和控制多边形内一点 $P^* \in D$, 要求一条三次 Q-Bézier 曲线, 使得 $r(t^*) = P^*, t^* \in (0, 1)$.

根据问题 1, 即有

$$r(t^*) = \sum_{i=0}^3 P_i b_{i,3}(t^*) = P^* \quad (7)$$

令 $P = B(t^*)$, 则 P^* 可表示为

$$P^* = P + p_1(P_1 - P_0) + p_2(P_3 - P_2) \quad (8)$$

由式(6)~式(8), 有

$$t^*(1-t^*)^3\lambda(P_1 - P_0) - t^{*3}(1-t^*)\mu(P_3 - P_2) = p_1(P_1 - P_0) + p_2(P_3 - P_2) \quad (9)$$

又因为 P_0P_1 与 P_2P_3 不平行, 即 $P_1 - P_0$ 与 $P_3 - P_2$ 线性无关, 由式(9)即可解出惟一的一组解

$$\lambda = \frac{p_1}{t^*(1-t^*)^3}; \quad \mu = -\frac{p_2}{(1-t^*)t^{*3}} \quad (10)$$

式(10)中的 $\lambda, \mu \in [-3, 1]$, 为问题 1 的解.

若 $P_0P_1 \parallel P_2P_3$, 则有无穷组 λ, μ 满足式(9). 不妨设 $P_0P_1 = P_2P_3$, 当 $P^* \notin P_0P_1$ 时, 有

$$\mu = \left(\frac{1-t^*}{t^*}\right)^2 \lambda - \frac{(P^* - P, P_3 - P_2)}{t^{*3}(1-t^*) |P_3 - P_2|^2} \quad (11)$$

可以选择一条合适的曲线(比如能量最小的曲线)来满足设计要求, 于是有定理 1 成立.

定理 1 对于给定控制多边形和控制多边形内一点 P^* , 当 P^* 介于曲线 $r_1(t), r_2(t)$ 之间时, 总是可以通过调整三次 Q-Bézier 曲线的形状参数 λ, μ , 使得 $r(t^*) = P^*, t^* \in (0, 1)$.

2.2 基于切矢约束的形状调整

问题 2 给定控制多边形 $P_0P_1P_2P_3$ (设 P_0P_1 与 P_2P_3 不平行) 的三次 Q-Bézier 曲线, 通过调整它的 λ, μ , 使得曲线上给定参数处的切矢为指定的切矢, 即 $r'(t^*) = \tau^*, t^* \in (0, 1)$, 且 $t^* \neq 1/4, 3/4$.

由式(6), 有

$$r'(t) = B'(t) - \lambda(4t-1)(1-t)^2(P_1 - P_0) + \mu(4t-3)t^2(P_3 - P_2) \quad (12)$$

其中 $B'(t) = -3(1-t)^2P_0 + 3(1-t)(1-3t)P_1 + 3t(2-3t)P_2 + 3t^2P_3$. 根据问题 2, 即有

$$r'(t^*) = \sum_{i=0}^3 P_i b'_{i,3}(t^*) = \tau^* \quad (13)$$

令 $\tau = B'(t^*)$, 则 τ^* 可表示为

$$\tau^* = \tau + d_1(P_1 - P_0) + d_2(P_3 - P_2) \quad (14)$$

由式(12)~式(14), 有

$$-(4t^*-1)(1-t^*)^2\lambda(P_1 - P_0) + t^{*2}(4t^*-3)\mu(P_3 - P_2) = d_1(P_1 - P_0) + d_2(P_3 - P_2) \quad (15)$$

又因为 P_0P_1 与 P_2P_3 不平行, 即 $P_1 - P_0$ 与 $P_3 - P_2$ 线性无关, 由式(15)即可解出惟一的一组解

$$\lambda = -\frac{d_1}{(4t^*-1)(1-t^*)^2}; \quad \mu = \frac{d_2}{(4t^*-3)t^{*2}} \quad (16)$$

当 d_1, d_2 满足

$$\left. \begin{aligned} -(4t^*-1)(1-t^*)^2 &\leq d_1 \leq 3(4t^*-1)(1-t^*)^2 \\ -3(4t^*-3)t^{*2} &\leq d_2 \leq (4t^*-3)t^{*2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

时, 式(16)中的 $\lambda, \mu \in [-3, 1]$ 为问题 2 的解, 于是有定理 2.

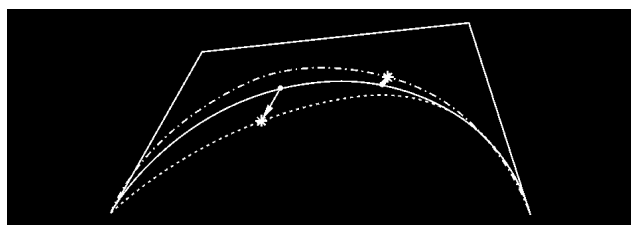
定理 2 给定控制多边形 $P_0P_1P_2P_3$ 的三次 Q-Bézier 曲线, 总是可以通过调整它的形状参数 λ, μ , 使得曲线上给定参数处为给定的满足式(14)和式(17)的切矢, 即 $r'(t^*) = \tau^*, t^* \in (0, 1)$, 且 $t^* \neq 1/4, 3/4$.

3 数值例子

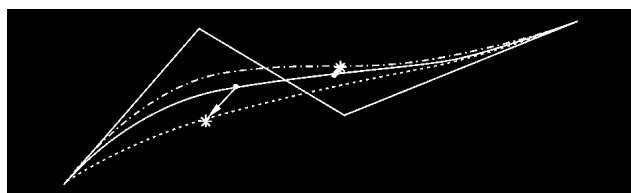
下面, 将给出几个例子来说明如何通过改变三次 Q-Bézier 曲线的形状参数来实现基于单点位置约束

和给定参数处切矢改变的形状调整,见图4、图5。

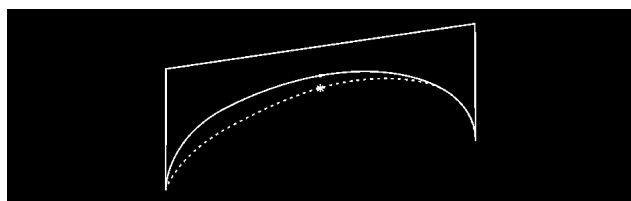
图4、图5的结果表明,本文的方法是有效的,可以广泛地应用于CAD工程实际中对曲线的形状调整。



(a) M-型控制多边形

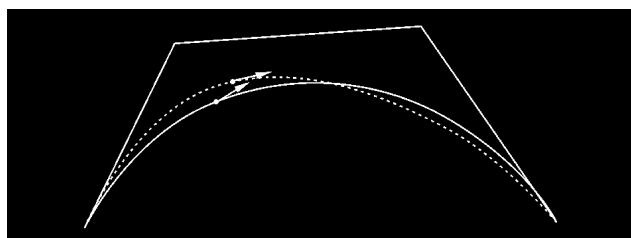


(b) S-型控制多边形

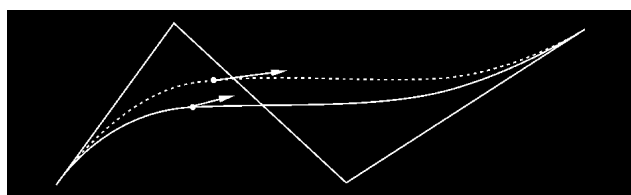


(c) 首末控制边平行

图4 基于点位置约束的形状调整



(a) M-型控制多边形



(b) S-型控制多边形

图5 基于切矢约束的形状调整

4 结 论

由带有形状参数的基函数构造的三次 Q-Bézier 曲线具有三次 Bézier 曲线的特征,其优点是具有 2 个形状参数,从而可以在不改变曲线控制多边形的情形下,方便地对曲线的形状进行调整。从逼近的角度看,三次 Q-Bézier 曲线比 C-Bézier 曲线^[7]具有更好的逼近性。

本文提出了一种修改 Bézier 曲线形状的新方

法,使得修改后的曲线在给定的参数点处满足用户指定的几何约束,并绘制了这些曲线的几何图形。实际上,还有许多方法也可以解决单参数点的约束问题,如拉伸能量法和弯曲能量法等等^[6,8],但这些方法基本上都是基于控制顶点的,并且求解比较复杂,不利于实际的交互设计。本文基于 Bézier 曲线自身的特点,利用它的首末边的特性,引入 2 个形状因子,对于给出的两种曲线形状调整的方法,具有明显的几何意义,计算简单、实用。三次 Q-Bézier 曲线可以作为有效的造型曲线方便地应用于几何造型的交互设计中,对于带约束的曲线、曲面形状调整具有重要的意义。在以后的工作中,如何把新方法运用到基于多点约束的 Bézier 曲线以及 Bézier 曲面的形状修改,将是我们进一步的研究课题。

参考文献:

- [1] Farin G. Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide [M]. 4th ed. New-York: Academic Press, 1997.
- [2] Piegl L, Tiller M. The NURBS book [M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1997.
- [3] Oruç H, Phillips G M. q-Bernstein polynomials and Bézier curves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 151(1): 1-12.
- [4] 梁锡坤. Bernstein-Bézier 类曲线和 Bézier 曲线重新参数化方法[J]. 计算机研究与发展, 2004, 41(6): 1016-1021.
Liang Xikun. Bernstein-Bézier class curves and a reparametrization method of Bézier curve[J]. Journal of Computer Research and Development, 2004, 41(6): 1016-1021.
- [5] 韩旭里, 胡奇辉, 彭丰富. 广义 Bézier 曲线[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, 18(3): 406-409.
Han Xuli, Hu Qihui, Peng Fengfu. Generalized Bézier curves [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2006, 18(3): 406-409.
- [6] 徐立, 陈玉健, 胡毓宁. 基于约束优化的 Bézier 曲线的形状修改[J]. 软件学报, 2002, 13(6): 1069-1074.
Xu Li, Chen Yujian, Hu Yuning. Shape modification of Bézier curves by constrained optimization [J]. Journal of Software, 2002, 13(6): 1069-1074.
- [7] Zhang Jiwen. C-curves: an extension of cubic curves [J]. Computer Aided Geometric Design, 1996, 13(2): 199-217.
- [8] Hu Shimin, Li Youfu, Ju Tao, et al. Modifying the shape of NURBS surfaces with geometric constraints [J]. Computer Aided Design, 2001, 33(12): 903-912.

(编辑 杜秀杰)